Origami colorati

Andrea Moiola

10 settembre 2009

Qualche tempo fa, piegando e assemblando degli origami modulari, mi è capitato di pormi alcune domande, ho provato a rispondere alla mia maniera e dopo un po' ne è uscito qualcosa di molto matematico, quindi con un certo tipo di obiettivi, metodo, linguaggio. In sostanza è comprensibile solo a chi ha una certa esperienza matematica e le connessioni con il problema origami di partenza non sono visibili. Però qualcosa di piegabile c'è, ben nascosto. Questo lavoro è diventato una tesina che potete trovare sul sito del CDO[1].

Alberto Carminati ha scritto un bel riassunto della mia tesina che permette di capire le cose più importanti senza diventare matti con algebra e formalismi vari. In questo documento invece voglio provare spiegare in modo semplice le "applicazioni origamistiche" che si possono tirare fuori da tutto ciò, evitando ogni forma di matematica non strettamente necessaria. Nonostante questo ce n'è ancora una certa quantità inevitabile.

A cosa serve questo lavoro? Qui non c'è nessun nuovo origami da piegare, ma un modo di fare *meglio* molti degli origami modulari già esistenti.

L'idea è questa: quando si costruisce un poliedro composto da molti **moduli** (12, 30, 300...) di alcuni **colori** diversi (3, 4, 5), come si fa a scegliere il modo di **assemblarli**? Non è una questione di abbinamenti di colori più o meno piacevoli ma di scelta di come distribuirli sul solido finale in un modo non casuale. Esistono molti criteri per distribuire i colori dei moduli, qui descrivo quelli che io considero più interessanti.

Ci sono due condizioni importanti da tenere bene a mente in tutto il seguito.

❶ Mi sono occupato solo degli origami che rappresentano un poliedro in cui **ogni modulo corrisponde ad uno spigolo**. Questi sono una parte consistente dei modulari noti: ad esempio moltissimi di *Multidimensional transformations: Unit Origami* e *Floral Origami Globes* di Tomoko Fuse (anche se spesso sono nascosti da moduli extra), i moduli di Francis Ow, il *penultimate module* di Robert Neale[2] e il *PHiZZ unit* di Thom Hull[3]. In particolare quest'ultimo modulo è interessante perché permette di costruire molti poliedri complicati, con diverse centinaia di moduli. Le idee che presento qui si possono generalizzare con un po' di pazienza e di fantasia anche ad altri casi di origami con un modulo per ogni faccia, o vertice, o altri ancora più complicati.

❷ Le colorazioni che mi interessano sono solo quelle in cui **gli spigoli concorrenti in uno stesso vertice hanno tutti colori diversi**. Questa è la regola fondamentale che rispetteremo sempre. In particolare se un poliedro ha tutti i vertici con lo stesso numero di spigoli mi piacerebbe colorarlo con quello stesso numero di colori: ad esempio un cubo o un dodecaedro con tre colori, un icosaedro con cinque. Direte, perché mai? Beh, queste colorazioni hanno diverse proprietà che piacciono molto ai matematici e danno risultati piacevoli, tutti i colori sono disposti un po'

[1] `http://www.origami-cdo.it/articoli/articoli.htm`

[2] Vedere `http://www.cs.utk.edu/~plank/plank/origami/origami.html`, il sito di Jim Plank. Qui vengono suggerite diverse colorazioni per vari poliedri, di tipo diverso da quelle di cui parlo io.

[3] Vedere il suo sito, una miniera di idee: `http://mars.wnec.edu/~thull/origamimath.html`

dappertutto nell'origami, in tutti i solidi che considero ogni colore corrisponde allo stesso numero di moduli.

In particolare per alcuni poliedri ho calcolato tutte le possibili colorazioni di questo tipo aventi il minimo numero di colori possibile. Quelle secondo me più interessanti, che può valer la pena piegare, sono descritte e disegnate qui[4]. Nella tesi però si studiano soprattutto poliedri generici più grandi: per questi è impossibile calcolare tutte le colorazioni, quindi in questi casi ne studiamo solo alcune interessanti. In molti casi la parte importante di questo documento sono le figure: magari non è facile capire quali sono le caratteristiche di una colorazione, ma il grafico permette di costruirla senza errori.

Ora vedremo tutte le colorazioni dei solidi regolari e provo a spiegare alcuni concetti matematici necessari. Nelle sezioni 2 e 3 vediamo diverse colorazioni interessanti per due solidi rispettivamente di 90 e 120 moduli. Nella sezione 4 spieghiamo una colorazione molto particolare per diversi solidi, dai 270 moduli (Figura 7) in su, questa secondo me è la parte più interessante di tutto questo documento. La sezione seguente tratta un po' di altri solidi ma le cose qui si fanno più complicate, per piegarle è necessario leggersi un po' anche la tesi. Infine la sezione 6 spiega alcune colorazioni di un solido particolare, un toro da 240 spigoli.

1 Riscaldamento: i solidi platonici

Iniziamo con qualche esempio molto semplice per capire di cosa stiamo parlando: i solidi platonici. Un ottaedro, ad esempio, ha quattro spigoli per ogni vertice, quindi vorremmo colorarlo con altrettanti colori. Si può vedere (dimostrare per un matematico) che, secondo queste regole, un ottaedro può essere colorato con quattro colori in un solo modo. Allo stesso modo esiste un solo modo di colorare con tre colori un tetraedro o un dodecaedro, mentre per un cubo esistono due colorazioni diverse. Nella figura 1 mostriamo queste colorazioni[5]. In realtà, in alcuni di questi casi, apparentemente è possibile costruire un'altra colorazione, ma è esattamente la speculare di queste (quella che si vede mettendo il solido davanti a uno specchio), quindi non ce ne preoccupiamo.

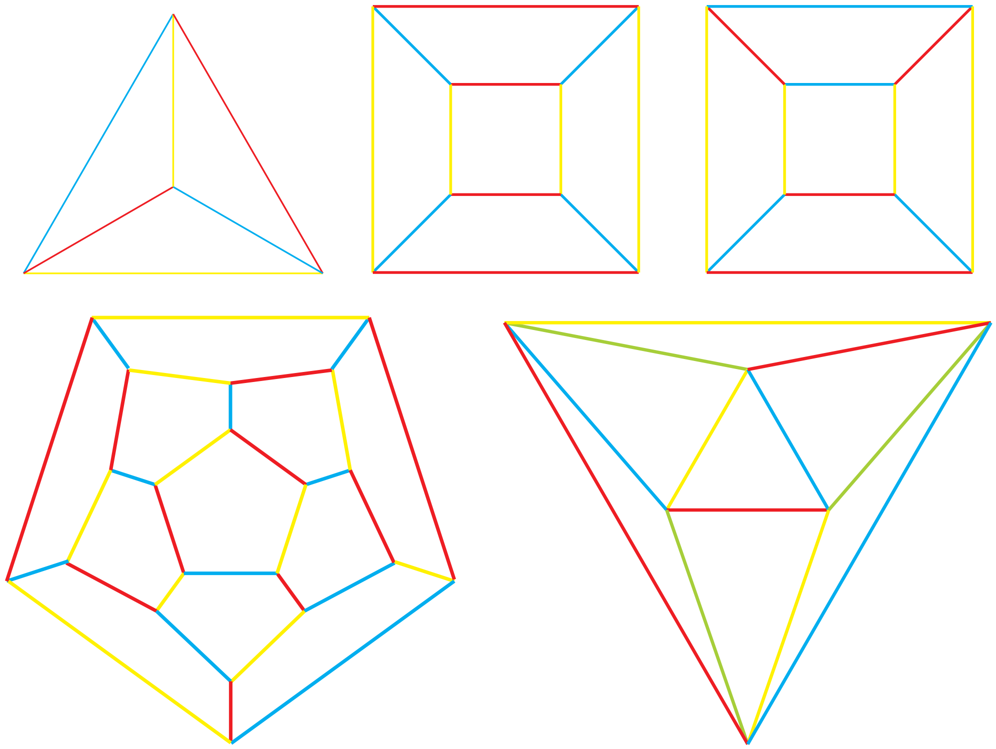
Tutto questo significa che se vogliamo costruire uno di questi poliedri con un numero minimo di colori in modo tale che ogni vertice abbia spigoli di colore diverso, allora possiamo farlo *solo* con gli schemi nella figura, o eventualmente quelli che si vedono mettendo la pagina davanti a uno specchio. Per vedere bene come è fatta la colorazione consiglio di piegarli con i moduli penultimate. Fin qui niente di nuovo, chi non ha mai costruito un cubo colorato in questo modo?

Ora vediamo una cosa matematica e un po' difficile, ma importante per andare avanti. Ogni colorazione di un poliedro ha una certa simmetria rappresentata da

[4] Questa selezione segue alcuni criteri più o meno matematici: se qualcuno vuole avere a disposizione tutte le colorazioni, per curiosità, per scegliere la propria preferita o per piegarle tutte (che pazienza!) posso inviarle per e-mail.

[5] NOTA IMPORTANTE: in tutte le figure di questo lavoro i poliedri sono rappresentati come dei *grafi*. Ogni segmento disegnato rappresenta uno spigolo del poliedro. Si può immaginare di disegnare un grafo su una superficie elastica, come quella di un palloncino, e di avvolgerla intorno ad una sfera. Deformandola un po' in modo da rendere dritti i segmenti si ottiene lo "scheletro" del poliedro. Viceversa, se si pensa ad un poliedro fatto di un materiale molto elastico, togliendo una faccia e allargando il buco rimasto si può deformarlo fino a schiacciarlo su un piano, quello che si ottiene è il grafo corrispondente. Una delle facce del solido non si vede nel grafo: è quella che è stata tolta dal poliedro complete e serve per "richiuderlo", i suoi spigoli sono quelli posti sul bordo dell'immagine. Il grafo dà solo informazioni sulla struttura del poliedro, non la sua forma precisa: se un poliedro viene deformato senza cambiare il modo di unire spigoli e vertici, il suo grafo non cambia.
Questo modo di rappresentare i solidi potrà sembrare complicato ma una volta capito il meccanismo è molto semplice e utile perché permette di osservare alcune proprietà (ad esempio le colorazioni) di un oggetto tridimensionale senza averlo concretamente tra le mani, ma solo con un disegno.

Figura 1: Le uniche 3-colorazioni del tetraedro, del cubo e del dodecaedro e la 4-colorazione dell'ottaedro.



due "gruppi", degli enti matematici di cui non è possibile (né necessario) dare una spiegazione qui. Il gruppo G_c indica quali rotazioni e riflessioni "conservano" la colorazione: cioè in quali casi se osserviamo il poliedro, poi lo ruotiamo o lo riflettiamo, lo vediamo ancora colorato allo stesso modo. G_p fa lo stesso ma considera anche le simmetrie che scambiano tra loro i colori. Per la definizione precisa, in matematichese, si veda la tesi a pagina 4. Qui non serve capire nel dettaglio cosa fanno questi gruppi, basta sapere che più un gruppo è "grande", più la colorazione corrispondente risulta simmetrica.

Nella tabella seguente diamo una spiegazione intuitiva di cosa fanno i diversi possibili gruppi di simmetria nei casi che incontreremo[6]. Chiamiamo mappa antipodale la rotazione di 180° intorno ad un asse, seguita dalla simmetria rispetto al piano perpendicolare a questo asse. Se una colorazione contiene la mappa antipodale nel gruppo G_c allora ogni spigolo ha lo stesso colore del proprio antipodale, quello situato all'opposto del solido.

[6]Attenzione, avviso per gli algebristi: questo vale solo per i poliedri che consideriamo qui, ad esempio un prisma può avere simmetria C_6 senza nessuna riflessione. Tutti i gruppi sono sottogruppi del gruppo icosaedrale. Con gli apici distinguiamo azioni diverse di gruppi algebricamente uguali (isomorfi).

$\{e\}$	Nessuna simmetria
C_2	Una rotazione di 180°
C_2^s	Una riflessione rispetto ad un piano
C_2^a	La mappa antipodale
C_3	Due rotazioni di 120° intorno allo stesso asse
C_6	Due rotazioni di 120°, l'antipodale e due riflessioni combinate con una rotazione di 60 gradi
D_3	Due rotazione di 120° e tre rotazioni di 180°
V_4^r	Tre rotazioni di 180° su assi tra loro perpendicolari
V_4^s	Una rotazione di 180° e due riflessioni
V_4^a	Una rotazione di 180°, una riflessione e la mappa antipodale
$(C_2)^3$	Tre rotazioni di 180°, la mappa antipodale e tre riflessioni
$D_3 \times C_2$	Come D_3 più la mappa antipodale e 5 riflessioni combinate con rotazioni
T	Tutte le rotazioni del tetraedro
T_h	Tutte le simmetrie del tetraedro (rotazioni e riflessioni)
I_h	Tutte le simmetrie dell'icosaedro (rotazioni e riflessioni)

Resta ancora un poliedro regolare: l'icosaedro. Questo ha cinque spigoli per ogni vertice, quindi servono moduli di cinque colori diversi. Si può calcolare (io l'ho fatto al computer con *Matlab* ma con tanta pazienza si può fare a mano) che esistono ben 18 colorazioni diverse.

Di queste una è particolarmente interessante perché è simmetrica rispetto a tutte le possibili rotazioni e riflessioni dell'icosaedro (in simboli $G_p = I_h$), credo che la maggior parte degli origamisti l'abbia già usata senza saperlo. Ad esempio è quella fotografata sulla copertina di *Floral origami globes* (al centro a destra, togliendo le parti arancioni). Nella Figura 2 si vede questa colorazione e una numerazione degli spigoli del solido.

La tabella spiega come assegnare i cinque colori (che chiamiamo con gran fantasia 1, 2, 3, 4 e 5) ai trenta spigoli così numerati per ottenere tutte le 18 colorazioni possibili. Si legge così: se si vuole costruire, per esempio, la colorazione numero 7 tra le 18 possibili, si colora il grafo (anche in senso letterale, con un pennarello) dando ad ogni spigolo il colore che nella tabella si trova nella colonna 7 e nella riga corrispondente al numero dello spigolo come disegnato nella figura a destra. Poi si piegano 6 moduli per ognuno dei cinque colori e si montano seguendo il grafo colorato appena costruito.

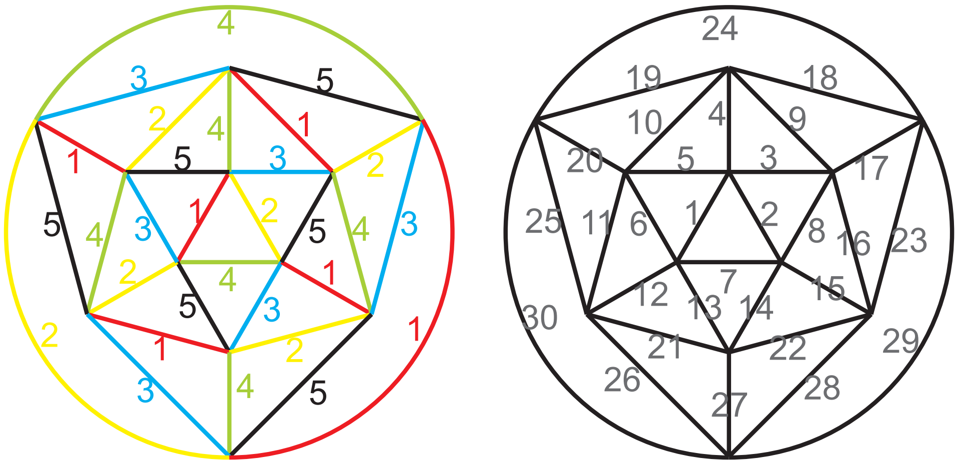
Ora che sappiamo costruire i cinque solidi platonici con il minimo numero di colori in tutti i modi possibili, è il momento di passare a dei solidi più complicati.

Io mi sono occupato dei cosiddetti **fullereni**: i solidi in cui **ogni faccia è un pentagono oppure un esagono e da ogni vertice partono esattamente tre spigoli**. Questo significa che d'ora in poi useremo sempre solo **tre colori**[7]. I fullereni con una struttura più regolare (i cosiddetti fullereni sferici) si possono classificare in un modo molto efficace ed è possibile dimostrare per essi molte proprietà interessanti. Per vedere come costruire quelli più grandi si veda la tesi a pagina 9. Invece di pensare a teoremi generali di esistenza di colorazioni e cose simili, qui guardiamo alcuni esempi particolari nel dettaglio.

Prima di fare questo però vediamo quali possono essere le colorazioni dei poligoni che li compongono. Un pentagono può essere colorato in 6 modi diversi, come in Figura 3, tutti simili tra loro. Un esagono invece può essere colorato in ben 14 modi diversi, raggruppati in quattro famiglie rappresentate nella stessa figura. Da qui si vede che alcune colorazioni sono preferibili ad altre: ad esempio esagoni della terza o della quarta famiglia hanno esattamente due spigoli per colore e daranno al nostro origami un aspetto più "regolare" di quelli della seconda famiglia.

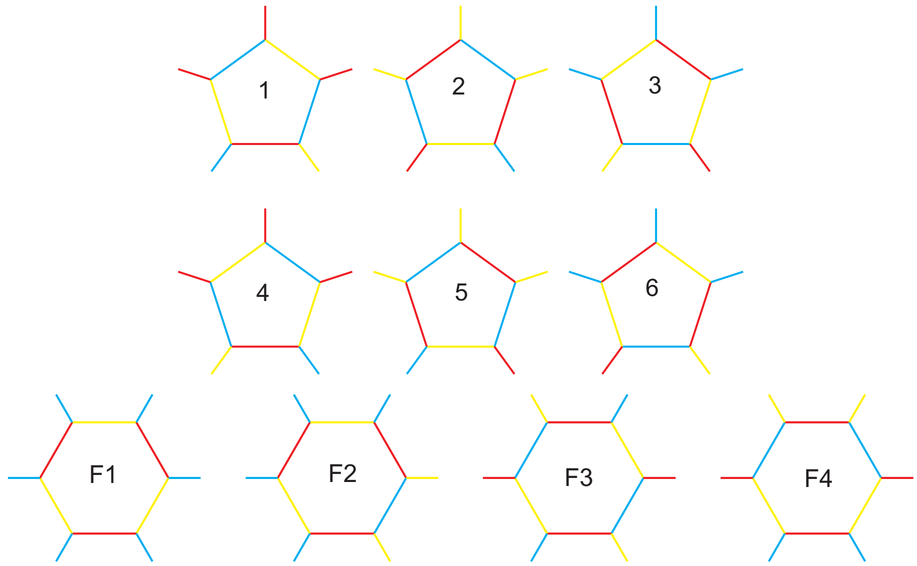
[7] Per non fare confusione nelle immagini il colore 1 sarà sempre rosso, il 2 giallo e il 3 blu.

Figura 2: La colorazione a 5 colori più simmetrica dell'icosaedro e la numerazione degli spigoli. Gli spigoli curvi rappresentano quelli "dietro" il poliedro. Nella tabella ci sono tutte le 18 5-colorazioni dell'icosaedro, quella in figura è la numero 18.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
G_c	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	C_2	C_2	C_2	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	C_2	C_2^a	C_2	C_2	$\{e\}$	C_2^a
G_p	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	C_2	C_2	C_2	V_4^r	V_4^r	D_3	C_5	V_4^a	V_4^r	V_4^s	T_h	$(C_2)^3$	$(C_2)^3$	$D_3 \times C_2$	I_h
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
7	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	5	5	5	1	5	5
9	2	2	2	2	2	2	2	5	5	5	1	1	1	2	2	5	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	2
11	3	3	3	3	3	3	4	3	3	1	4	4	1	1	1	4	4	4
12	4	4	5	5	5	5	5	4	5	4	5	5	4	4	4	3	3	2
13	5	5	4	4	4	4	4	5	4	5	4	4	5	5	5	5	5	5
14	4	4	5	5	5	5	5	4	5	4	5	5	4	1	4	3	3	3
15	5	5	4	4	4	4	4	5	4	5	1	1	1	4	1	5	1	1
16	4	4	5	5	5	5	5	2	2	4	2	5	4	1	4	4	4	4
17	5	5	4	4	4	4	4	4	4	2	5	2	2	4	1	2	2	2
18	3	3	3	3	5	5	3	2	2	1	2	5	5	5	5	1	5	5
19	5	5	5	5	3	3	5	3	3	2	5	2	2	1	1	2	2	3
20	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	1	1	4	4	4	1	1	1
21	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	1	1	3	2	3	1	1	1
22	3	3	3	3	2	1	3	1	1	1	3	2	2	3	2	2	2	2
23	2	1	2	1	3	3	2	3	3	3	4	3	3	2	3	3	3	3
24	1	2	1	2	1	2	1	1	5	5	3	4	1	3	2	4	4	4
25	2	1	2	1	2	1	2	5	1	3	2	3	5	5	5	5	5	5
26	5	5	4	4	4	4	3	1	4	5	3	2	2	3	2	2	2	3
27	2	1	2	1	3	3	2	3	3	3	2	3	1	4	1	4	4	4
28	1	2	1	2	1	2	1	4	5	2	5	4	5	5	5	1	5	5
29	4	4	5	5	2	1	5	5	1	4	1	1	4	1	4	5	1	1
30	3	3	3	3	5	5	4	2	2	1	4	5	3	2	3	3	3	2

Figura 3: Tutti i pentagoni possibili e le quattro famiglie degli esagoni.



Ci serve conoscere un altro semplice concetto. In uno di questi poliedri colorati con tre colori supponiamo di scegliere un vertice e da questo seguire un cammino formato solo da spigoli rossi e gialli, ad esempio, e ignorare quelli blu. Seguendo il percorso prima o poi ci ritroveremo magicamente al punto di partenza. Se in questa passeggiata lungo il poliedro abbiamo attraversato *tutti* gli spigoli rossi e gialli allora abbiamo costruito un cosidetto **ciclo hamiltoniano**.

Io ho costruito fullereni fino a 270 moduli usando i moduli PHiZZ, con fogli di circa 4 cm di lato e un po' di biadesivo (lo so, lo so, ma con così tanti moduli non vedo altro modo). Il risultato è sufficientemente solido ma conviene non conservarlo su un piano ma in qualcosa che ne segua la forma, io costruisco una semplice struttura in fil di ferro. Thomas Hull ha costruito fullereni almeno fino a 810 moduli.

2 Il pallone da calcio $GC_{1,1}$ da 90 moduli

Il primo esempio di fullerene è il classico pallone da calcio, costruito con 90 moduli, che a volte si chiama icosaedro tronco e nella tesi è indicato come $GC_{1,1}$ (vedere pagina 21). Contiene dodici pentagoni e venti esagoni. Anche qui si possono costruire tutte le colorazioni e si scopre che sono 39.

Se guardiamo le facce, scopriamo che tutte le possibili colorazioni hanno almeno due esagoni della seconda famiglia, quelli più "brutti", o almeno più irregolari.

Possiamo guardare le simmetrie: una sola colorazione (A) ha tre assi di rotazione perpendicolari tra loro, altre 9 (B-H) possono ruotare di 120° intorno ad un asse che passa per il centro di un esagono (ed eventualmente delle riflessioni), in altri 9 casi (I,J) c'è una sola rotazione di 180°, e nei 20 casi rimanenti (K) non c'è alcuna simmetria. Per chi è interessato, riassumiamo in una tabella le simmetrie delle colorazioni e assegniamo un nome A, B, . . . , K ai gruppi di colorazioni con gli stessi gruppi di simmetria. La seconda riga nella tabella indica quante colorazioni diverse hanno quella simmetria.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	1x	1x	1x	1x	1x	1x	1x	3x	3x	6x	20x
G_p	V_4^r	C_6	D_3	C_3	D_3	D_3	C_3	C_6	C_2^r	C_2^r	$\{e\}$
G_c	V_4^r	C_6	D_3	$\{e\}$	$\{e\}$	C_3	C_3	C_3	C_2^r	$\{e\}$	$\{e\}$

Le prime colorazioni mi sembrano quelle più interessanti. Le vediamo in Figura 5 pronte per essere piegate.

A Questa è l'unica colorazione con una simmetria avente tre assi di rotazione (di un angolo piatto) perpendicolari tra loro. Inoltre è l'unica in cui tutte e tre le coppie di colori formano un ciclo hamiltoniano. Ogni pentagono ha al proprio opposto un pentagono colorato allo stesso modo.

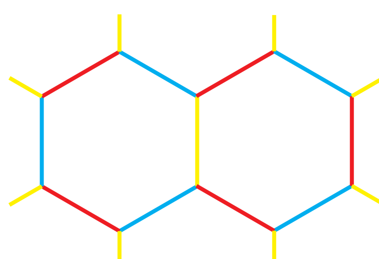
B Questa è forse la più interessante, o almeno la mia preferita. È l'unica colorazione identica alla propria speculare e l'unica in cui ogni spigolo è identico a quello situato al proprio opposto. La caratteristica più appariscente nel modello piegato è la seguente: l'insieme di tutti gli spigoli dei colori 1 e 3 forma un motivo ripetuto sei volte identico, a forma di doppio esagono, come in figura 4. Questi motivi si dispongono al centro delle facce di un cubo circoscritto al poliedro, sono allineati con gli spigoli di questo cubo e sono collegati tra loro da elementi del colore 2.

C La terza colorazione è l'unica colorazione in cui ci sono sei pentagoni di un tipo e sei di un altro, ognuno è uguale al proprio opposto.

D-E Queste due colorazioni sono le uniche ad avere due pentagoni per ognuno dei sei tipi possibili. Nella D, i due pentagoni opposti a due pentagoni uguali risultano sempre uguali tra loro. Queste sono le uniche colorazioni in cui i tre colori hanno lo stesso ruolo: ruotandole si può osservare la stessa figura con i colori scambiati[8]. Infine queste due sono anche le uniche tra le dieci A-H in cui le coppie di esagoni opposti sono della stessa famiglia.

F Questa colorazione assomiglia alla B: si ottiene ruotando di 60° uno qualsiasi dei due esagoni della prima famiglia (colori 1-2-1-2-1-2). Questo cancella tre dei sei motivi presenti.

Figura 4: Il pattern ripetuto sei volte nella colorazione B.

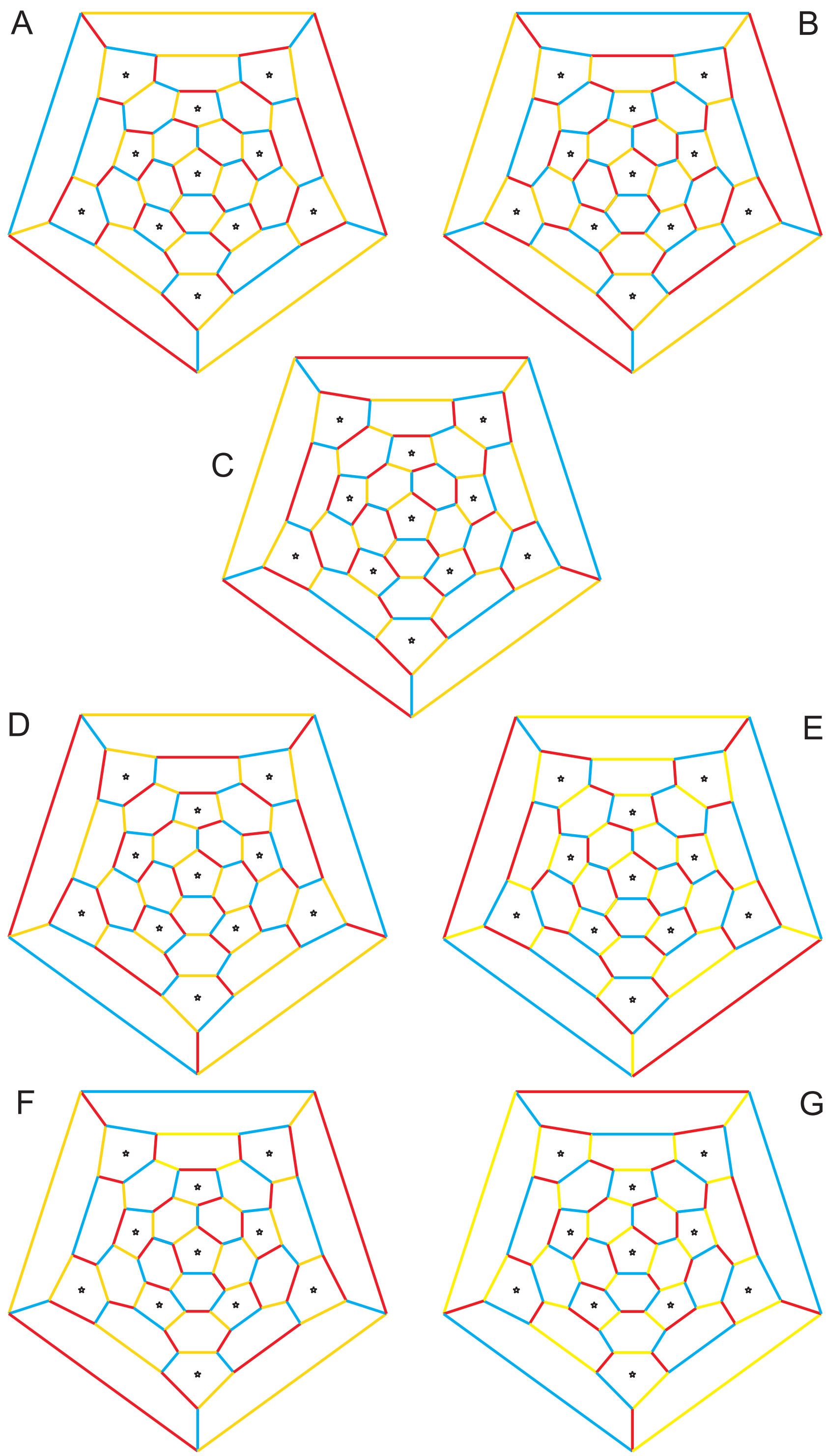


3 Il $GC_{2,0}$ da 120 moduli

Il secondo fullerene è di tipo PPI ed è costruito con 120 spigoli/moduli. Ha 12 pentagoni e 30 esagoni. Esistono ben 543 colorazioni distinte, di cui solo 12 hanno

[8] Questo significa che C_3 è sottogruppo del quoziente G_p/G_c. In questo senso a colorazione E è più simmetrica della D perché ammette anche le trasposizioni di colori.

Figura 5: Le sette colorazioni più simmetriche per il pallone da calcio (90 moduli).



più di una simmetria (A-E), come si vede in tabella[9]. Una cosa curiosa è che *ogni* colorazione ha esattamente 4 pentagoni contenenti un solo spigolo rosso, 4 con un solo spigolo giallo e 4 con un solo blu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M
	1x	1x	1x	6x	3x	3x	40x	10x	8x	44x	426x
G_p	T	C_6	V_4^r	D_3	C_3	C_2^a	C_2^r	C_2^a	C_2^s	C_2^r	$\{e\}$
G_c	V_4^r	C_2^a	C_2	$\{e\}$	$\{e\}$	C_2^a	C_2^r	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$

Le 4 colorazioni B ed F sono le uniche in cui ogni spigolo è uguale al proprio opposto.

Le 8 colorazioni B, C, D e una delle E, hanno esattamente due pentagoni per ogni tipo. La colorazione B è l'unica con almeno due esagoni per ognuno dei 14 tipi.

Nelle 11 colorazioni A, B, D, E i tre colori sono simmetrici tra loro, hanno lo stesso ruolo[10].

Esiste un'unica colorazione in cui ogni coppia di colori forma un ciclo hamiltoniano, appartiene alla categoria M. Tra le colorazioni A-F l'unica con cicli hamiltoniani è la C, sono hamiltoniani i cicli dei colori 1-3 e 2-3.

La colorazione A merita un discorso a parte. Ha due caratteristiche principali. La simmetria della colorazione è tetraedrale, cioè la massima possibile, come spiegato nella tesi (Teorema 2.3). Questo significa che se si sceglie come criterio di bellezza di una colorazione la sua simmetria, meglio di così è impossibile. La seconda caratteristica è che tutti gli esagoni hanno due spigoli per colore. Questo fatto è evidente nel poliedro piegato e gli dà un aspetto regolare. A mio parere è molto bella da un punto di vista puramente estetico. Vedremo tra poco che questa colorazione è l'esempio più semplice di una categoria di colorazioni di diversi fullereni.

Il succo di questa sezione è nella Figura 6, qui sono disegnate le colorazioni secondo me più interessanti da piegare: la A, le quattro con spigoli opposti uguali B ed F, la C e l'unica con un ciclo hamiltoniano per ogni coppia di colori (ma nessuna simmetria).

4 I fullereni PPI

Dopo aver calcolato tutte le colorazioni e le relative simmetrie per i due fullereni più piccoli viene naturale provare a fare lo stesso per quelli un po' più grandi. Fare questo conto però può essere davvero troppo pesante anche per un computer normale.La cosa da fare allora è usare la testa invece della forza bruta: conviene cercare fin dall'inizio *solo* le colorazioni con una qualche regolarità imposta a priori.

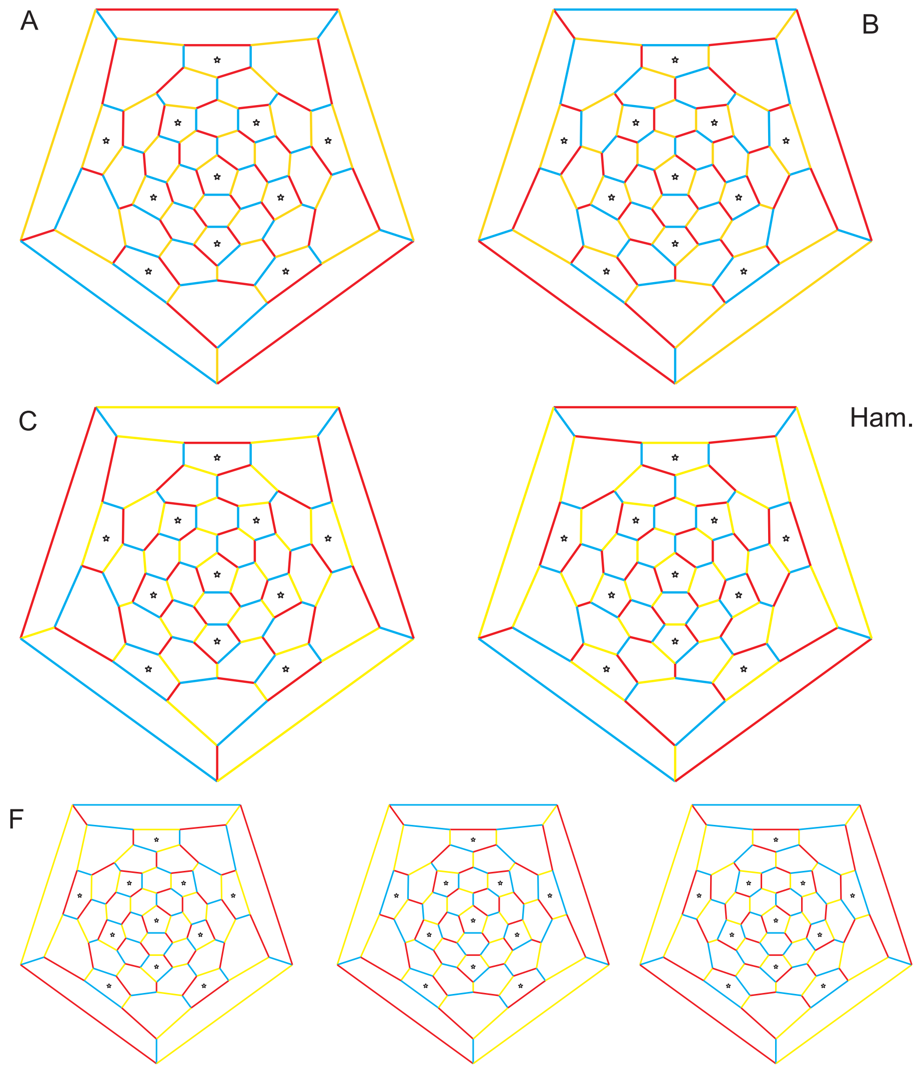
Aumentando il numero dei moduli troviamo un fullerene da 210 spigoli ($GC_{2,1}$), ma è meno simmetrico degli altri, meglio lasciarlo stare per ora. Concentriamoci su una famiglia particolare di fullereni: i cosiddetti PPI (*pentagons pointing-in*), cioè quelli in cui, presi tre pentagoni vicini, questi hanno un vertice che punta verso il centro del triangolo formato dai tre pentagoni. Per ogni numero naturale $k = 1, 2, 3 \ldots$, esiste un fullerene PPI con $30 \times k^2$ spigoli: quello da 30 è il dodecaedro, quello da 120 lo abbiamo appena visto, poi esistono da 270, 480, 750, 1080. . .

Si può immaginare di costruirli disponendo dodici pentagoni come in un dodecaedro ma posti ad una certa distanza, inserendo $k - 1$ esagoni tra ogni coppia di pentagoni che nel dodecaedro erano adiacenti, e infine riempiendo le venti facce triangolari rimaste con altri esagoni. La spiegazione più precisa si trova sul sito di Thomas Hull `http://mars.wnec.edu/~thull/combgeom/bucky/buckynotes.html` oppure nella sezione 2.3 della mia tesina (vedere soprattutto la Figura 2.4).

[9] Nelle colorazioni F-L, G_p è di tipo C_2, cioè contiene una sola simmetria

[10] Vedere nota 8.

Figura 6: Le colorazioni più simmetriche per il fullerene da 120 moduli: A, B, C, le tre F e quella con tre cicli hamiltoniani.



Per il PPI da 270 spigoli ($GC_{3,0}$) ho provato a calcolare tutte le colorazioni aventi gli spigoli opposti identici. Queste sono ben 20.972. Per fare un confronto, nel fullerene precedente le colorazioni con questa caratteristica erano solo 4 su 543, quindi potremmo aspettarci che le colorazioni totali qui siano qualche milione! Un buon motivo per non calcolarle tutte.

Tra queste oltre ventimila però non sono riuscito a trovarne nessuna interessante. Osservando le simmetrie si vede che 94 hanno $G_p = C_6$ (68 con $G_c = C_6$ e 26 con $G_c = C_6$ e due pentagoni per tipo), in tutti gli altri casi $G_p = C_2^a$ (il gruppo più piccolo che permette di avere spigoli opposti identici). Ogni colorazione contiene almeno un esagono della seconda famiglia e uno di una delle ultime due.

Per trovare una colorazione interessante dobbiamo usare un'altra strategia. Andiamo per analogia con il fullerene da 120: lì abbiamo una colorazione (A) con molte proprietà simpatiche, proviamo a trovarne una analoga anche qui. Questa idea permette di trovare una colorazione molto molto interessante per ognuno dei fullereni PPI. Per quello da 270 moduli vediamo il grafico e la colorazione piegata con i moduli PHiZZ in Figura 7.

Esiste un modo semplice per costruire questa colorazione: ricordate che i pentagoni di un PPI corrispondono ai pentagoni di un dodecaedro? E che un dodecaedro si colora con tre colori in un solo modo? Immaginiamo di avere davanti il grafo di un fullerene PPI, iniziamo a colorare i dodici pentagoni come i corrispondenti pentagoni del dodecaedro. Poi coloriamo gli spigoli compresi tra due spigoli di pentagoni, usando lo stesso colore. Infine gli esagoni rimanenti si possono colorare in un unico modo rispettando la regola che impone di avere tre colori diversi in ogni vertice. La Figura 8 mostra come funziona questo procedimento per la parte di fullerene compreso tra tre pentagoni nel caso da 480 moduli. Questa colorazione è descritta in dettaglio nella sezione 2.3.2 della tesi.

La colorazione così ottenuta ha proprietà molto interessanti. La sua simmetria è tetraedrale, cioè la massima possibile che possiamo chiedere ad un fullerene. Altra cosa fondamentale: tutti gli esagoni hanno esattamente due spigoli per colore. Inoltre quasi[11] tutti gli esagoni sono della terza famiglia, la più regolare possibile.

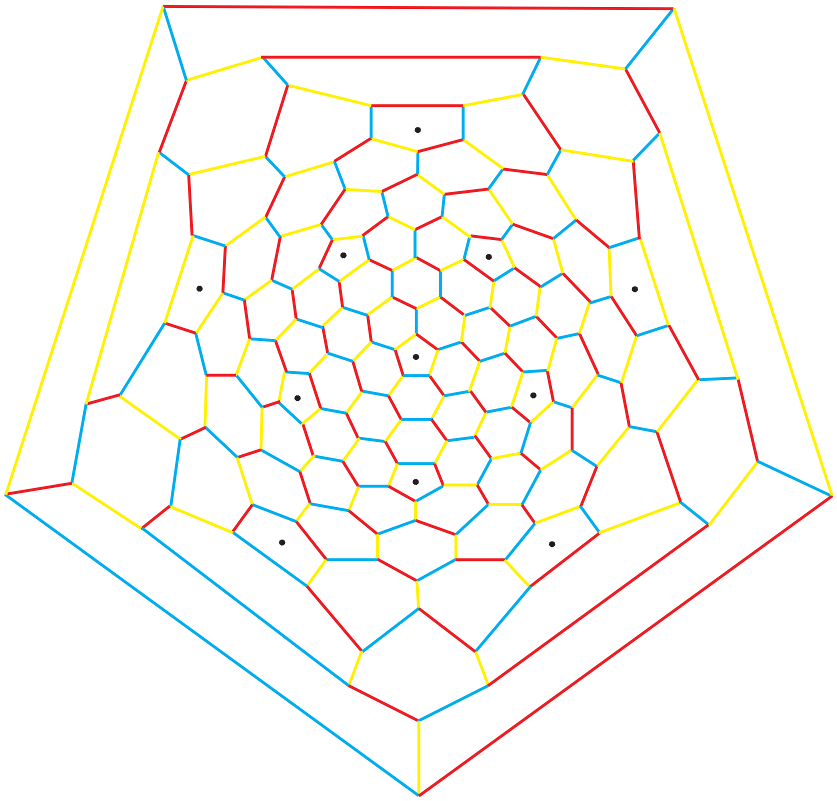
La cosa più evidente è che in ogni parte del solido gli spigoli di uno stesso colore sono disposti in modo quasi parallelo (lo si vede nella Figura 8 e lo si intuisce dalla foto). Questo fa sì che quando si costruisce il poliedro, ad esempio con moduli PHiZZ, questo abbia un aspetto molto ordinato e regolare. Dopo tutta la teoria necessaria per arrivare fino a qui, abbiamo a disposizione una colorazione per diversi poliedri che dà risultati concreti davvero belli.

Si possono anche vedere relazioni interessanti, ma complicate, tra un fullerene così colorato e i solidi che possono essere inscritti in esso, ad esempio il dodecaedro o il cosidetto *lesser stellated dodecahedron*.

Un consiglio pratico per assemblare i moduli di questa colorazione. Per il PPI da 270 moduli, io ho costruito 12 blocchi di 20 moduli ciascuno e poi li ho uniti usando i 30 moduli avanzati. Ogni blocco è come quello in Figura 9 (a sinistra), i segmenti tratteggiati sono quelli che uniscono blocchi diversi. Bisogna costruire quattro blocchi uguali a quello nella figura, altri quattro facendo ruotare i colori (rosso → giallo, giallo → blu, blu → rosso) e gli ultimi quattro facendoli ruotare un'altra volta. Per unirli poi conviene avere a disposizione un dodecaedro colorato come in Figura 1 e disporre i blocchi in modo che i pentagoni corrispondano a quelli del dodecaedro. Non ho mai costruito (per ora) PPI più grandi, ma questa tecnica funziona allo stesso modo, per quello da 480 i blocchi sono da 40 moduli come quello in Figura 9 a destra, senza bisogno di moduli per unirli.

[11] Per il significato preciso di *quasi* si veda la tesi a pagina 16.

Figura 7: La colorazione regolare del fullerene PPI da 270 moduli.



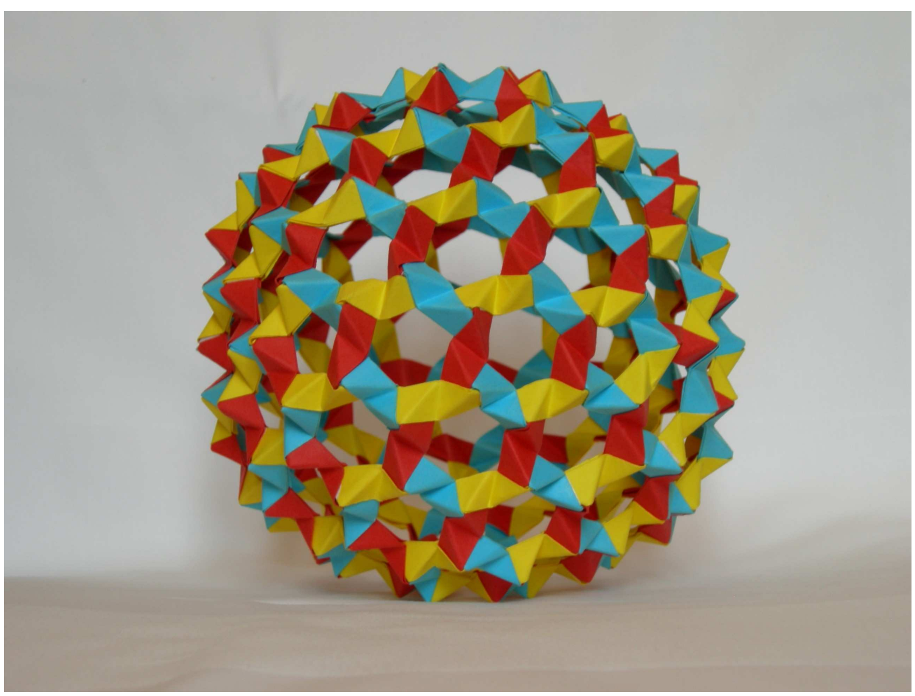


Figura 8: La costruzione della colorazione regolare in una parte di fullerene PPI.

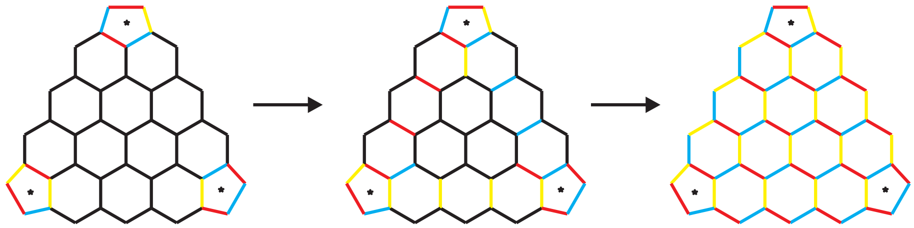
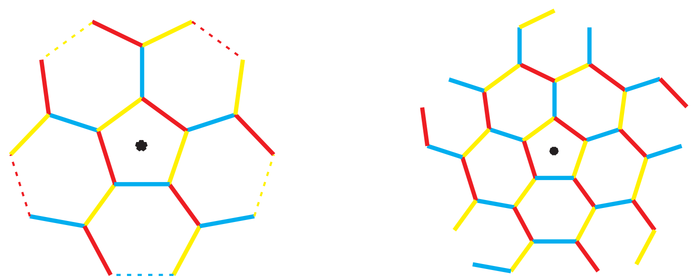


Figura 9: Uno dei dodici blocchi per i fullerene PPI da 270 moduli e uno per quello da 480.



5 Gli altri fullereni

Oltre ai PPI esistono molti altri fullereni. Per questi però non ho trovato una colorazione semplice come quella appena vista, qui le cose si fanno più difficili.

Una famiglia è quella dei fullereni PPO (*pentagons pointing out*). Ne esiste uno per ogni numero naturale k, quando questo numero è pari si può costruire una colorazione a simmetria tetraedrale in cui quasi tutti gli esagoni hanno solo due colori. Se k è dispari si può costruire una colorazione analoga ma questa viola la simmetria tetraedrale in (soli) 12 spigoli. Visto che queste colorazioni si basano sull'idea di *tile* (spiegata a pagina 10 della tesi) rimando alla loro descrizione nella sezione 2.4.2 della tesina.

La sezione 2.5 spiega un modo di costruire una colorazione per molti altri fullereni ma è davvero complicata, è inutile provare a spiegarla qui.

Infine esistono i cosiddetti fullereni planari ma non sferici. Questi sono solidi più asimmetrici ma possono avere colorazioni interessanti. Un esempio è la colorazione a simmetria tetraedrale con 138 spigoli disegnata nella Figura 2.17 della tesi. Non ho ancora costruito nessuno di questi poliedri, non so né che forma abbiano effettivamente né se la costruzione con i PHiZZ è stabile.

6 Il toro

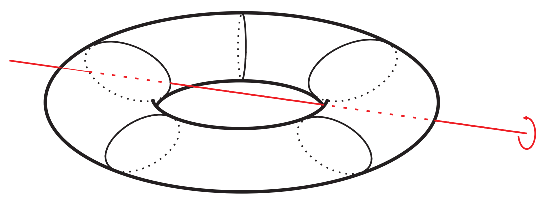
Nel capitolo 3 della tesi, si parla di poliedri con forme diverse: toro, piano proiettivo e bottiglia di Klein. Oltre che essere matematicamente abbastanza difficile, questa parte parla per lo più di questioni che non hanno quasi niente a che vedere con gli origami. Infatti si parla di colorazioni di tori formati da soli esagoni, per costruirli servirebbero moduli con lo stesso incastro ma di diversa lunghezza, da disporre sul lato interno e su quello esterno del toro, qualcuno conosce qualcosa del genere?

Per quanto riguarda la bottiglia di Klein, l'unica versione origami che io conosco è quella di Michal Kosmulski[12] fatta con moduli PHiZZ. Questa però usa vari poligoni mentre quelle considerate nella tesi usano solo esagoni. Qui servirebbero moduli ancora più elastici e "non orientabili".

L'ultima sezione (3.3) invece è molto pratica. Qui si descrive un toro ben noto agli origamisti[13], costruito con 240 moduli PHiZZ (10 pentagoni, 60 esagoni, 10 ettagoni). Ovviamente si può colorare nel modo più noto, a cerchi concentrici, analogamente a quello (di 555 moduli) di Roberto Gretter[14]. Ma perché fare le cose semplici quando è possibile complicarsi un po' la vita?[15]

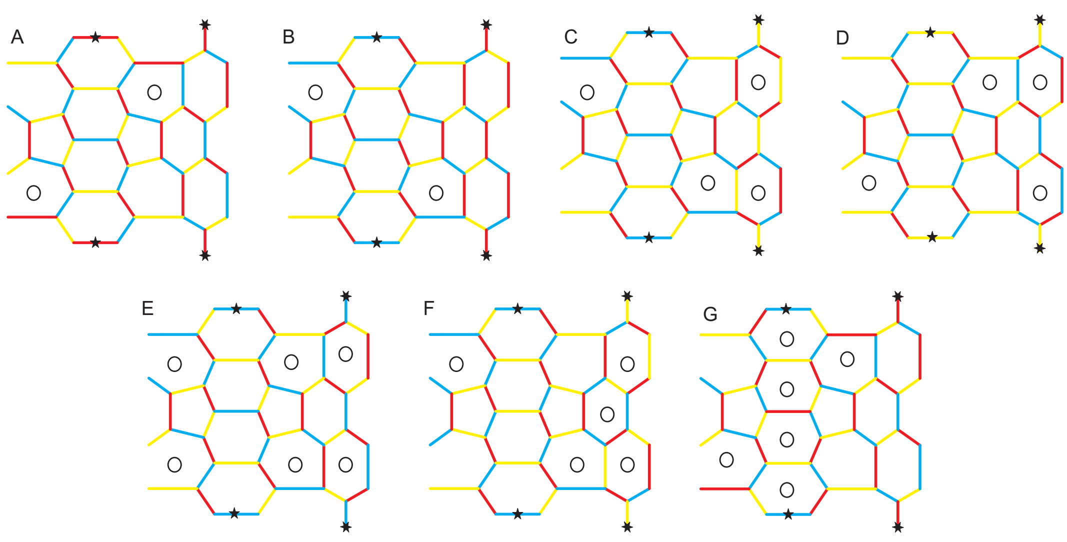
Questo toro è formato da 5 parti uguali (*tiles*) contenenti 48 spigoli ognuna, ripetute lungo la circonferenza maggiore come in Figura 10. Le colorazioni che rendono i cinque tiles identici sono in tutto 74. Tutte hanno almeno un esagono della seconda famiglia.

Figura 10: La divisione del toro in 5 tiles.



È possibile ruotare di 180° il toro intorno al punto medio del segmento che unisce due pentagoni, come indicato in rosso nella Figura 10. Le colorazioni simmetriche rispetto a questa rotazione sono 7. Sono disegnate in Figura 11.

Figura 11: Le sette colorazioni simmetriche del toro da 240 moduli, il cerchio indica gli esagoni della seconda famiglia.



[12]http://hektor.umcs.lublin.pl/~mikosmul/origami/misc.html, sito interessante anche per molti altri modulari.

[13]http://kahuna.merrimack.edu/~thull/combgeom/tori/torusnotes.html

[14]http://ditelo.itc.it/people/gretter/origami.html

[15]Si potrebbe fare questa domanda in qualunque altro punto di questo lavoro, chi è arrivato fin qui non si fa certo spaventare dalle cose complicate.

La colorazione E è l'unica in cui gli esagoni opposti rispetto al piano di simmetria che attraversa la circonferenza maggiore del toro sono della stessa famiglia, cioè è la colorazione a maggior simmetria.

Per il toro i cicli hamiltoniani sono particolarmente interessanti. La colorazione D ha un ciclo (rosso-blu) che si avvolge 10 volte intorno alla circonferenza minore del toro, la colorazione G ne ha uno (giallo-blu) che si avvolge 5 volte, la colorazione F addirittura ne ha due (rosso-giallo e rosso-blu) che si avvolgono entrambi 5 volte. Infine la colorazione B ha un ciclo hamiltoniano (giallo-blu) che si avvolge 4 volte intorno alla circonferenza maggiore del toro e 5 intorno a quella minore. Quest'ultimo ciclo è molto evidente, nel modulo piegato si formano una specie di "binari del treno" che copre tutta la superficie, con gli spigoli del colore rimanente disposti trasversalmente a fare da "traversine". Quest'effetto mi piace molto, il toro piegato con i moduli PHiZZ si vede nella Figura 12 (arancione e verde sostituiscono rosso e blu).

Un altro modo per sfruttare questi risultati è quello suggerito da Alberto Carminati: costruire un ciclo hamiltoniano con sfumature progressive di un colore e usare un colore molto contrastante per gli ottanta spigoli rimanenti. Ciclo giallo-arancione-rosso su sfondo nero come propone lui è sicuramente molto scenografico. Anche in questo caso consiglio di usare la colorazione B, nero invece del rosso della figura e i colori sfumati invece di giallo e blu. I cicli hamiltoniani delle altre colorazioni sono più curvi e tortuosi, credo darebbero un risultato meno soddisfacente.

Figura 12: La colorazione B del toro da 240 moduli piegato con moduli PHiZZ. Il ciclo hamiltoniano giallo e verde si avvolge intorno ad entrambe le circonferenze del toro.

Come costruire concretamente il toro a partire dai grafi in Figura 11? Con i moduli PHiZZ basta costruire 5 blocchi identici come nell'immagine, facendo attenzione che lo spigolo orizzontale e quello verticale sul lato superiore (indicati con le stelle) sono in realtà gli stessi del lato inferiore e sono quelli che permettono al solido di chiudersi. I 48 moduli così uniti prenderanno una forma curva e poi sarà facile unire i cinque pezzi.

7 Conclusioni

Bene, chi è sopravvissuto fin qui? Non vedo nessuna mano alzata...

Questo documento dovrebbe essere il lato origamistico di risultati un po' più matematici, spero sia risultato abbastanza chiaro da convincere qualcuno a piegare uno di questi solidi con queste colorazioni, o meglio ancora da suggerire qualche nuova idea e aiutare a inventare qualcosa di nuovo.

Per riassumere un po', un origamista che vuole tenersi alla larga dalla matematica cosa dovrebbe aver imparato da questa lettura? Spero che possa:

- aver capito che quando si costruisce un modulare, oltre alla piegatura e all'assemblaggio, può essere interessante vedere come disporre i colori;
- avere a disposizione tutte le colorazioni senza spigoli adiacenti dello stesso colore per i cinque solidi platonici, per il pallone da calcio e per il fullerene da 120 moduli;
- avere una colorazione con tante proprietà estetiche-matematiche per tutti i fullereni PPI, che vuol dire per tanti "palloni" arbitrariamente grandi;
- solo per chi ha molta pazienza, avere delle colorazioni analoghe anche per altri fullereni, quelle descritte brevemente nella sezione 5;
- avere almeno una colorazione interessante per il toro da 240 moduli;
- avere un po' di idee per costruire nuove colorazioni di altri modulari.

Tutta la parte "informatica" di questo lavoro l'ho fatta con degli script che ho scritto in *Matlab*. I due programmi principali sono quello che calcola tutte le colorazioni compatibili di un poliedro (non solo per spigoli ma volendo anche per facce o vertici) e quello che identifica colorazioni uguali e ne calcola i gruppi di simmetria. Prossimamente riorganizzerò questi files, inclusi i risultati per i poliedri che ho analizzato, in modo che chi è interessato possa usarli per cercare tutte le colorazioni che vuole[16]. Chiaramente sarebbe interessante avere un programma che dai dati di un poliedro calcoli direttamente tutto, senza appoggiarsi a *Matlab* che è comprensibile solo a pochi iniziati e ha una licenza carissima, ma questo va al di là delle mie capacità informatiche. Se qualcuno è interessato solo alle colorazioni complete dei poliedri che ho già analizzato, posso mandargli i risultati in un formato semplice, senza che abbia bisogno di usare *Matlab*.

Perché non ho calcolato le colorazioni anche per altri solidi di piccole dimensioni, non fullereni? Il problema è uno solo: per ogni nuovo poliedro bisogna inserire una certa mole di dati (matrici di adiacenza, delle facce, l'azione delle simmetrie), è un procedimento noioso, da fare con la massima precisione e molto lungo, serve tanto tempo.

Infine vorrei ringraziare diverse persone: il prof. Pernazza che mi ha seguito con pazienza e disponibilità nella parte matematica; Alberto Carminati che non solo è l'unico ad aver letto la tesina, ma l'ha anche tradotta dal matematichese e mi ha dato suggerimenti interessanti; Francesco Decio e tutto il direttivo del CDO per l'interesse dimostrato nonostante le difficoltà nel capire la tesi; tutti quelli che mi hanno consigliato nel lungo e tortuoso lavoro che ha portato qui, specialmente per gli aspetti più informatici.

[16]Per contattarmi: `andrea.moiola @ gmail.com`